

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2014 – 2015 учебном году
9 класс**

Время выполнения заданий — 4 часа

2		
	4	
		8

К решению
задачи 9.1

9.1. *Квадрат из чисел называется магическим, если в нём суммы чисел во всех строках, во всех столбцах, а также на двух главных диагоналях равны между собой. В квадрате 3×3 заполнены только три позиции из девяти — см. рисунок. Можно ли дополнить этот квадрат шестью числами так, чтобы он стал магическим? Ответ обосновать.*

Решение: Попробуем достроить квадрат до магического. Начнём заполнение с правого верхнего угла. Так как мы не знаем, какое число можно туда поставить, обозначим его переменной x — см. рисунок.

2		x
$x+4$	4	$6-x$
$x+2$		
$10-x$		8

К решению
задачи 9.1
Нам известна сумма чисел по одной из диагоналей: 14; она же равна сумме чисел на другой диагонали, в каждой строке и каждой столбце — это, так называемая, *магическая* сумма. Значит, в левом нижнем углу стоит число $14 - 4 - x = 10 - x$, во второй строке справа — число $14 - 8 - x = 6 - x$. Теперь из подсчёта чисел в средней строке получаем, что в ней слева стоит число $x + 4$, а из первого столбца видим, что это число равно $x + 2$. Так как $x + 4 \neq x + 2$ для всех x , получаем противоречие, которое показывает, что дополнить квадрат до магического невозможно

Ответ: Нельзя.

Примечание: Разумеется, можно обозначить через неизвестное число, стоящее в любой другой незаполненной клетке. Аналогичным образом возникнет противоречие.

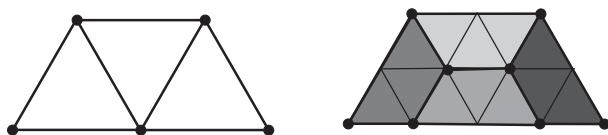
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство невозможности заполнения квадрата	7 баллов
в верном доказательстве имеются арифметические ошибки, не влияющие на ход доказательства	6 баллов
корректное составление несовместной системы уравнений без верного доказательства того, что эта система несовместна	3 балла
ответ без обоснования или любая попытка доказать, что ответ положительный или иллюстрация отрицательного ответа на нескольких примерах	0 баллов

9.2. *Существует ли многоугольник, который можно разрезать, как на три равных треугольника, так и на четыре равных четырёхугольника? Ответ обосно-*

вать.

Решение: Один из таких многоугольников — это равнобедренная трапеция, у которой одно основание вдвое меньше другого и равно боковой стороне. Она складывается как из трёх равносторонних треугольников (см. рисунок слева), так и из четырёх подобных ей трапеций (см. рисунок справа). Для того, чтобы увидеть второе разрезание (первое можно считать очевидным), проще всего провести в треугольниках из первого разрезания все средние линии. Трапеция распадётся на 12 маленьких треугольников, которые надо сгруппировать по 3.



К решению задачи 9.2

Ответ: Существует.

Примечание: Такой многоугольник, скорее всего, не единственный, однако авторам другие примеры не известны

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
приведён верный пример многоугольника и показаны оба его разрезания	7 баллов
приведён верный пример многоугольника, но указано только одно его разрезание (либо на 3 равных части, либо на 4)	5 баллов
приведён верный пример многоугольника, но требуемые его разрезания не указаны	2 балла
попытка доказать отрицательный ответ или верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов

9.3. Известно, что ни одно из чисел a , b и c не является целым. Может ли случиться так, что каждое из четырёх чисел ab , bc , ca , abc — целое? Ответ обосновать.

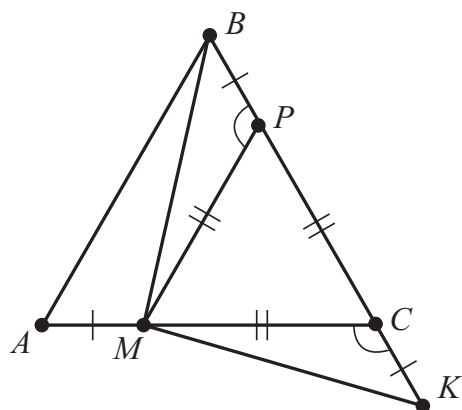
Решение: Построим в общем виде один из примеров. Пусть x , y , z — различные простые числа (можно также взять попарно взаимно-простые, большие 1). Положим $a = xy/z$, $b = xz/y$, $c = zy/x$. Легко убедиться, что условие задачи выполнено: каждое из чисел a , b и c не будет целым ввиду взаимной простоты числителя и знаменателя, в то время как $ab = x^2$, $bc = z^2$, $ca = y^2$ и $abc = xyz$ — все числа целые. В частности, при $x = 2$, $y = 3$ и $z = 5$ получаем $a = 6/5$, $b = 10/3$, $c = 15/2$, $ab = 4$, $bc = 25$, $ca = 9$.

Ответ: Такое может случиться.

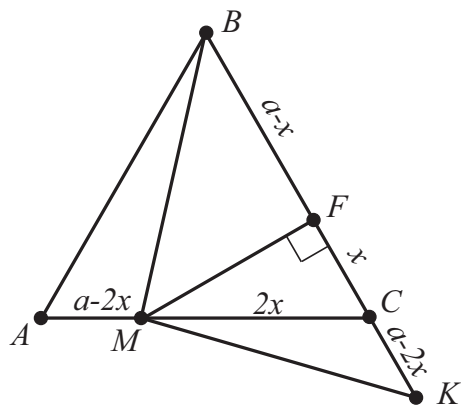
есть в работе	баллы
верное обоснованное решение (достаточно одного конкретного примера таких чисел)	7 баллов
числа не приведены, но есть конструкция, их получающая. При этом не показано, что полученные числа подойдут	5 баллов
числа не приведены, а конструкция, их получающая не всегда сработает (напр. в приведённом выше решении не указано, что x, y, z взаимно просты.)	3 балла
попытка доказать отрицательный ответ или верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием) или неверные примеры (в любом количестве)	0 баллов

9.4. На стороне AC равностороннего треугольника ABC взята точка M , а на продолжении стороны BC за вершину C — точка K таким образом, что $AM = CK$. Докажите, что $MB = MK$.

Решение:



к решению задачи 9.4,
первый способ



к решению задачи 9.4,
второй способ

Способ 1. Проведём через точку M прямую, параллельную стороне BA . Она отсечёт от треугольника ABC подобный ему треугольник $СМР$ (см. рисунок). Этот треугольник правильный, поэтому $СМ = СР$. Тогда $ВР = ВС - РС = АС - СМ = АМ = СК$. Кроме того, $\angle ВРМ = 120^\circ = \angle МСК$. Значит, треугольники $ВМР$ и $МСК$ равны по двум сторонами углу между ними. Отсюда $МВ = МК$, что и требовалось доказать.

Способ 2. Опустим перпендикуляр $МF$ из точки M на сторону BC (см. рисунок). Треугольник $МFC$ прямоугольный с углом $C = 60^\circ$, поэтому его меньший катет равен половине гипотенузы. Пусть сторона треугольника ABC равна a , длина отрезка MC равна $2x$. Тогда $СК = АМ = a - 2x$, $CF = x$, $BF = a - CF = a - x$ и $FK = FC + СК = x + a - 2x = a - x$. Итак, $BF = FK$, высота треугольника $ВМК$ является его медианой, значит, треугольник $МВК$ равнобедренный, что и требовалось доказать.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
при доказательстве равенства треугольников нет ссылки на конкретные признаки	баллы не понижать
выполнено дополнительное построение, ведущее к решению, но доказательства нет	3 балла
другие случаи	0 баллов

9.5. Докажите, что для положительных чисел a, b, c не могут одновременно выполняться неравенства $a(1 - b) \geq b(1 - c) \geq c(1 - a) > \frac{1}{4}$.

Решение: Предположим противное, то есть пусть для некоторых положительных чисел a, b, c неравенства выполнены. Тогда все числа a, b, c меньше 1 (иначе выражение в какой-то скобке отрицательно) и выполняется система

$$\begin{cases} a(1 - b) > \frac{1}{4} \\ b(1 - c) > \frac{1}{4} \\ c(1 - a) > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Перемножим левые и правые части неравенств (это допустимо, так как они положительны). Получим неравенство - следствие $abc(1 - a)(1 - b)(1 - c) > \frac{1}{4^3}$. Тогда хотя бы одно из произведений (они положительны!) $a(1 - a)$, $b(1 - b)$ и $c(1 - c)$ больше $\frac{1}{4}$. Но $a(1 - a) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 \leq \frac{1}{4}$. Аналогичные неравенства верны для чисел b и c . Противоречие.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
получено, но не доказано неравенство $abc(1 - a)(1 - b)(1 - c) > \frac{1}{4^3}$	4 балла
рассмотрен случай $a = b = c$ или доказано, что $a(1 - a) \leq 1/4$	3 балла
замечено, что при $a = b = c = 1/2$ достигается граница, то есть что нестрогое неравенство может выполняться	2 балла
замечено, что все числа меньше 1	1 балл
иллюстрация неравенства на конкретных примерах или алгебраические выкладки (любой длины), не ведущие к решению	0 баллов

9.6. Трёхголовый Змей Горыныч праздновал свой день рождения. Три его головы по очереди лакомились именинными пирогами и за 15 минут съели два одинаковых пирога. Известно, что каждая голова ела столько времени, сколько понадобилось бы двум другим, чтобы вместе съесть один такой же пирог. Каждая голова ест пирог с собственной постоянной скоростью. За сколько минут три головы Змея Горыныча съели бы вместе один такой же пирог? Ответ обосновать.

Решение:

Способ 1. (логический) Представим себе, что Змей Горыныч ел не 2 пирога, как в условии, а 5. При этом ел их так: первые два пирога головы ели по очереди, как в условии, но пока одна из голов их поглощала, две другие съедали ещё один пирог. (По условию им на это времени как раз и хватало). Тогда все головы едят непрерывно в течении 15 минут и съедают полностью 5 пирогов. Значит, один пирог был бы съеден за $15 : 5 = 3$ минуты.

Способ 2. (алгебраический) Пусть x_i ($1 \leq i \leq 3$) — скорость поедания пирогов i -ой головой (скорость измеряется в пирогах за минуту). Нас интересует величина $\frac{1}{x_1 + x_2 + x_3}$. А условие задачи записывается уравнениями

$$\frac{1}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_1 + x_3} + \frac{1}{x_2 + x_3} = 15$$

и

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} = 2.$$

Заметим, что $\frac{x_1}{x_2 + x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3} - 1$. Преобразовав таким образом все дроби второго уравнения, получим

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3} + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_3 + x_1} + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 + x_2} - 3 = 2$$

$$(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_2 + x_3} + \frac{1}{x_3 + x_1} + \frac{1}{x_1 + x_2} \right) = 5$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)15 = 5,$$

откуда $\frac{1}{x_1 + x_2 + x_3} = 3$.

Ответ: За 3 минуты.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и обоснованный ответ	7 баллов
верное решение с неверным из-за арифметических ошибок ответом	6 баллов
имеется идея рассмотреть такое поедание пирогов, как указано в первом способе решения	5 баллов
составлена верная система уравнений, но она не решена (если при этом указана величина, которую надо найти, то количество баллов увеличивается на 1)	2 балла
верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием) или рассмотрены частные случаи, напр. когда две головы едят с одинаковой скоростью	1 балл